سوال ۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنهٔ تعریف هستند که در آن‌ها مشتق تابع برابر صفر است یا وجود ندارد.

دامنهٔ تعریف این تابع، مجموعه اعداد حقیقی یعنی $D_f = (-\infty, +\infty)$ است. $y = \frac{1}{14}x^{\frac{14}{3}} - \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{11}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^4 - 1) \Rightarrow y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^4-1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{غ.ق.} \end{cases}$$

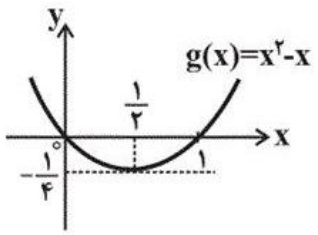
$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

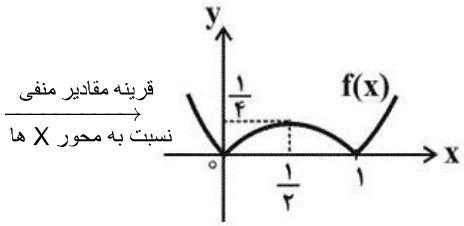
در $x = \pm 1$ مشتق صفر است و در $x = 0$ مشتق وجود ندارد. پس مجموعه طول نقاط نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\{-1, 0, 1\}$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به رسم نمودار تابع $f(x) = |x^2 - x|$ داریم:





با توجه به نمودار بالا، نمودار تابع f سه نقطه بحرانی دارد. دو نقطه گوشه‌ای $x = 0$ و $x = 1$ و نقطه $x = \frac{1}{2}$ که مشتق در آن برابر صفر است.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع $(-\infty, 1]$ می‌باشد و حالا مشتق آن را بدست می‌آوریم:

$$y' = 2x\sqrt{1-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x(1-x)-x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

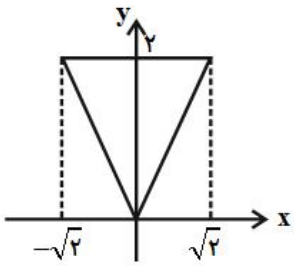
$$= x(4-5x)$$

مشتق در $x = 0$ و $x = \frac{4}{5}$ برابر صفر است که هر دوی این نقاط در دامنه هستند. به علاوه در $x = 1$ مشتق وجود ندارد ولی چون این نقطه، نقطه درونی دامنه نیست آن را جزء نقاط بحرانی حساب نمی‌کنیم.

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم.



$$f'(x) = 2x\sqrt{3-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$= \frac{2x(3-x^2)-x^3}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$= \frac{3x(2-x^2)}{\sqrt{3-x^2}}$$

در نقاطی به طول $x=0$ و $x = \pm\sqrt{2}$ مشتق تابع برابر صفر و در نقاط $x = \pm\sqrt{3}$ مشتق تابع وجود ندارد. ولی $x = \pm\sqrt{3}$، نقاط درونی دامنه‌ی تابع نیستند و بحرانی محسوب نمی‌شوند. پس $(0,0)$ و $(-\sqrt{2},2)$ و $(\sqrt{2},2)$ نقاط بحرانی تابع هستند. مساحت مثلث مورد نظر برابر است با:

$$S = \frac{2\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

تابع در $x = ۲$ ناپیوسته است، بنابراین مشتق‌ناپذیر و طول نقطه بحرانی است. حال مشتق را به دست می‌آوریم:

$$y' = \begin{cases} \frac{-۲x}{(x^۲-۱)^۲} & ; x < ۲ \\ ۲x - ۲ & ; x > ۲ \end{cases}$$

مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{y'=۰} \begin{cases} \frac{-۲x}{(x^۲-۱)^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ < ۲ & ; \text{قابل قبول} \\ ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \not> ۲ & ; \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

بنابراین تابع ۲ نقطه بحرانی دارد.

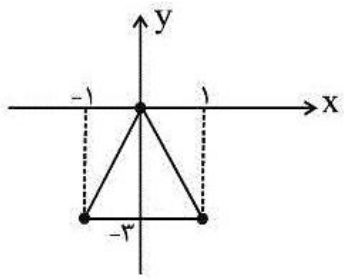
دقت کنید که $x = \pm ۱$ در دامنه تابع و مشتق آن قرار ندارد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

$$f'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(x^۲ - ۴) + \sqrt[۳]{x^۲}(۲x) = \frac{۸(x^۲-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

تابع f در $x = ۰$ مشتق پذیر نیست و از طرفی $x = \pm ۱$، جواب‌های معادله $f'(x) = ۰$ هستند. بنابراین نقاط $(-۱, -۳)$، $(۰, ۰)$ و $(۱, -۳)$ نقاط بحرانی این تابع هستند (مطابق شکل زیر).



مساحت مثلث رسم شده در شکل، برابر $S = \frac{۱}{۲}(۲ \times ۳) = ۳$ است.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۳

دامنه تابع f، R است.

$$f'(x) = \frac{2x+k}{3\sqrt[3]{(x^2+kx-k)^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{-k}{2}$$

برای این‌که $x = \frac{-k}{2}$ تنها نقطه بحرانی تابع f باشد، دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد:

حالت اول: مخرج f' ریشه نداشته باشد:

$$\Rightarrow k^2 + 4k < 0 \Rightarrow -4 < k < 0 \quad (1)$$

حالت دوم: مخرج ریشه مضاعف $-\frac{k}{2}$ داشته باشد:

$$\Rightarrow \Delta = k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k = 0, -4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} k \in [-4, 0]$$

پس k، ۵ مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم.

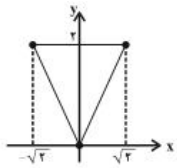
$$f'(x) = 2x\sqrt{3 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$= \frac{2x(3-x^2)-x^3}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{6x-3x^2}{\sqrt{3-x^2}}$$

$$= \frac{3x(2-x^2)}{\sqrt{3-x^2}}$$

در نقاطی به طول $x = 0$ و $x = \pm\sqrt{2}$ مشتق تابع برابر صفر و در نقاط $x = \pm\sqrt{3}$ مشتق تابع وجود ندارد. ولی $x = \pm\sqrt{3}$، نقاط درونی دامنه تابع نیستند و بحرانی محسوب نمی‌شوند. پس $(0,0)$ و $(-\sqrt{2},2)$ و $(\sqrt{2},2)$ نقاط بحرانی تابع هستند. مساحت مثلث مورد نظر برابر است با:

$$S = \frac{2\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$



سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

این تابع در نقاط صحیح غیرصفر $(Z - \{0\})$ ناپیوسته است و در نتیجه این نقاط بحرانی هستند. در $x = 0$ پیوسته است اما مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

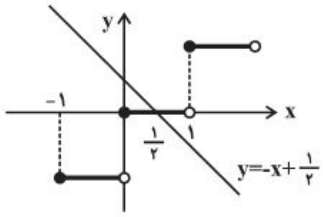
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}(2[x] + x - 1) \Rightarrow$$ وجود ندارد

اما در نقاط غیرصحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f(x) = x[x] + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \xrightarrow{x\notin Z} f'(x) = [x] + x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow [x] = -x + \frac{1}{2} \quad (1)$$

اگر دو تابع $y = [x]$ و $y = -x + \frac{1}{2}$ را رسم کنیم، نقاط برخورد ریشه معادله (۱) خواهد بود.



ملاحظه می‌کنیم که معادله $f'(x) = 0$ یک ریشه $x = \frac{1}{2}$ دارد، پس مجموعه طول نقاط بحرانی تابع $Z \cup \{\frac{1}{2}\}$ خواهد بود.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

تابع را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 + 4 & ; \quad x \le -2 \text{ یا } x \ge 2 \\ 2x + x^2 - 4 & ; \quad -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & ; \quad x < -2 \text{ یا } x > 2 \\ 2 + 2x & ; \quad -2 < x < 2 \end{cases}$$

در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند، پس مشتق وجود ندارد و این نقاط بحرانی‌اند. همچنین داریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ غ ق ق} \\ 2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی تابع به‌صورت $(2,4)$ و $(-2,-4)$ و $(-1,-5)$ خواهد بود که حاصل‌ضرب عرض آن‌ها ۸۰ است.